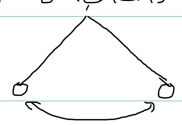
Variáveis ação-ângulo

Considere o pêndulo simples restrito a um plano, com Hamiltoniano

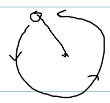
$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta \qquad \left[\text{conservado, } = \text{energia total}\right]$$

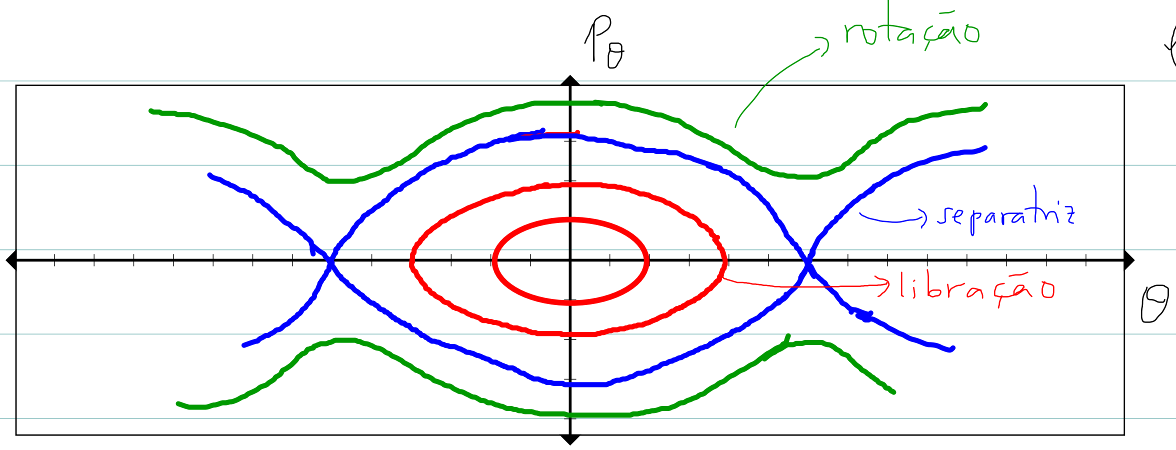
Como são as órbitas deste sistema no espaço de fase? Para um dado valor $H=E$, há 2 possibilidades genéricas:

- se $\underline{E < mgl}$, então $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, onde $\theta_0 = \cos^{-1}\left[\frac{-E}{mgl}\right]$. O pêndulo oscila periodicamente entre esses limites, traçando curvas fechadas no espaço de fase. Para $E \ll mgl$ essas curvas aproximam as elipses traçadas por um OHS. Esse tipo de movimento é chamado libração



- se $\underline{E > mgl}$, o pêndulo chega até $\theta = \pi$ ainda com energia cinética, portanto segue rodando adiante até chegar a $\theta = 2\pi$ e repetir o ciclo. O movimento é periódico no sentido de que tanto $p_\theta(t)$, como $p_\theta(\theta)$, são funções periódicas, mas $\theta(t)$ se estende sem limite. Esse tipo de movimento é chamado rotação.





Há é claro uma interface entre os dois tipos, quando $\underline{E = mg\ell}$, chamada linha separatriz. Corresponde ao caso em que o movimento tende a parar exatamente com o pêndulo virado de cabeça para baixo. Vale observar que, como a 'curva' $(p_\theta \equiv 0, \theta \equiv \pi)$ é uma solução, e soluções não se cruzam no espaço de fase, então o movimento de um pêndulo lançado de $\theta \neq \pi$ com $E = mg\ell$ aproxima, mas nunca chega a alcançar, esse ponto

Assim, com exceção da curva separatriz, os movimentos possíveis de um pêndulo são sempre periódicos, podendo ser ou do tipo rotação, ou do tipo libração.

Há uma classe de sistemas de grande interesse devido a sua simplicidade, chamados de sistemas multiperiódicos separáveis, que generalizam esse comportamento:

Def: Um sistema com $H(q,p)$ independente do tempo é separável se sua eq. de HJ independente do tempo $H\left(q_1 \ldots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1$ possui uma integral completa da forma $W(q_1 \ldots q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = W_1(q_1, \alpha_1 \ldots \alpha_n) + \ldots + W_n(q_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ [esse é o tipo de sistema que admite solução por separação de variáveis]. Nesse caso $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}$.

Def: Um sistema separável é multiperiódico se, para [quase*] toda órbita no espaço de fase, as suas $\underline{\text{projeções}}$ sobre cada plano (q_i, p_i) correspondem ou a movimentos do tipo libração [curva $p_i(q_i, \alpha)$ fechada, com $a_i \leq q_i \leq b_i$] ou do tipo rotação [$p_i(q_i, \alpha)$ é uma curva periódica em q_i, mas q_i não é periódica em t].

* As órbitas nas curvas separatrizes podem ser vistas como librações de período infinito

Ex: oscilador harmônico 2D : $H = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2\right] + \frac{1}{2}\left[k_x x^2 + k_y y^2\right]$

$\rightarrow$ Eq HJ: $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[k_x x^2 + k_y y^2\right] = E$

$\therefore$ Separando $W = W_x(x) + W_y(y)$: $\exists\ \alpha_x, \alpha_y$ com $\alpha_x + \alpha_y = E$ tais que

$$\begin{cases} \frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dx}W_x\right)^2 + \frac{1}{2}k_x x^2 = \alpha_x & \longrightarrow \text{elipse no plano } (x, p_x) \\ \frac{1}{m}\left(\frac{d}{dy}W_y\right)^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 = \alpha_y & \longrightarrow \text{'' '' '' } (y, p_y) \end{cases}$$

É importante notar que, embora em cada projeção $p_i(q_i)$ seja periódico, a órbita do sistema como um todo em geral não será periódica. Para isso ser verdade, é necessário e suficiente que o período da órbita global corresponda a um número inteiro de períodos de cada uma das projeções: $T = n_i T_i = \frac{2\pi n_i}{\omega_i}$

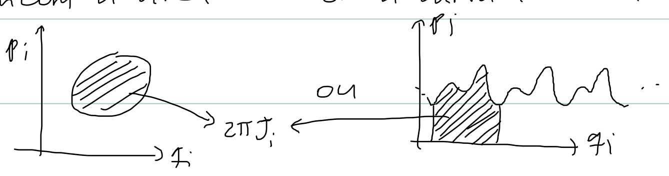
Isso portanto só ocorre se $\frac{\omega_i}{\omega_j} = \frac{n_j}{n_i}$ forem números racionais — o que nem sempre é o caso.

Em sistemas desse tipo, existe um conjunto de variáveis canônicas especiais, chamadas variáveis de ação e variáveis de ângulo, que permitem obter os múltiplos períodos sem ter de resolver as eqs. de movimento completamente.

Def: As variáveis de ação p/ um sistema multiperiódico separável são:

$$\boxed{J_i \equiv \frac{1}{2\pi}\oint_{1\text{ período}} p_i\, dq_i} \qquad i=1\ldots n$$

Para libração (resp. rotação), correspondem à area interior à curva fechada (resp., abaixo de um "comp. de onda" da curva $p_i(q_i)$)



Como $p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$, então J_i dep. apenas de $(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \rightarrow$ são constantes. Como cada par (q_i, p_i) é independente, esses J_i's também são independentes um do outro. Podemos então inverter essas eqs. e escrever $\alpha_i(J_1, \ldots, J_n)$.

↳ v. Goldstein.

Recordando agora: $W(q,P)$ é a função geradora de uma transformação canônica para a qual $K = H = \alpha_1 = \text{cte}$. Até agora vínhamos identificando $P_i = \alpha_i$. Porém, se escolhemos ao invés disso $P_i = J_i$, obtemos $K = \alpha_1(J_1, \ldots J_n)$, i.e., a Hamiltoniana em função dos J_i's [o valor é sempre o mesmo pois assumimos $\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$]

As variáveis canonicamente conjugadas aos J_i's são: $Q_i \equiv \varphi_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$

Suas eqs. de movimento são:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial K}{\partial J_i} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial J_i} \equiv \Omega_i \;\longrightarrow \text{são constantes, já que só dependem dos } J_i\text{'s.}$$

$$\rightarrow \boxed{\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \Omega_i t}$$ por este motivo são chamados variáveis angulares

Até aí, nada de mais: o mesmo se daria com qualquer conjunto de constantes obtidas a partir de $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Ocorre que, com essa escolha dos J_i's, os ω_i's correspondem precisamente às frequencias (angulares) do movimento periódico em cada plano (q_i, p_i)

Para ver isso: suponha inicialmente que o sistema seja como um todo periódico, com período $\tau = n_i \tau_i$, sendo τ_i os períodos de cada projeção e n_i inteiros.

Cada variável de ângulo φ_i pode ser escrita $\varphi_i(q_1 \ldots q_n, J_1, \ldots J_n)$. Durante um período τ, os J_i's permanecem fixos, e os q_i's variam seguindo n_i vezes uma trajetória do tipo libração ou rotação no espaço de fase. Nesse intervalo, φ_i varia de:

$$\Delta\varphi_i = \oint \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} dq_k = \oint \sum_k \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial J_i} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \sum_k \frac{\partial W_k}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_k \oint \frac{\partial W_k}{\partial q_k} dq_k$$

só aqui podemos inverter a soma e a integral, já que esta se dá separadamente em cada plano p_k, q_k

$$= \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_k \oint p_k \, dq_k = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_k 2\pi n_k J_k = 2\pi n_i = \frac{2\pi}{\tau_i} \tau$$

Por outro lado, por definição $\Delta\varphi_i = \Omega_i \tau$. Assim, para um sistema separável periódico:

$$\boxed{\text{As frequencias angulares } \omega_i \equiv \frac{2\pi}{\tau_i} \text{ dos movimentos periódicos em cada plano } (q_i, p_i) \text{ do espaço de fase são dadas por } \omega_i = \Omega_i = \frac{\partial K}{\partial J_i} \text{ ("frequências fundamentais")}}$$

E se o sistema como um todo não for estritamente periódico? Nessa situação pode-se mostrar [v. Goldstein] que o movimento $(q_i(t), p_i(t))$ em geral não será periódico, mas multiperiódico, i.e., cada coord. local pode ser expressa em termos de uma série de Fourier

$$q_i(t) = \sum_{j_1, \dots, j_n = -\infty}^{\infty} a^{(i)}_{j_1 \dots j_n} e^{2\pi i \sum_k j_k \varphi_k} \qquad [\text{libração}]$$

Há casos especiais onde os movimentos locais são periódicos, mesmo se o global não for.

Nesse caso a eq. acima se reduz a

$$q_i(t) = \sum_j a_j^{(i)} e^{2\pi i j [\varphi_i(0) + \Omega_i t]}$$

Em outras palavras, dado um sistema (multi)periódico separável, podemos determinar as suas frequencias fundamentais com o seguinte procedimento

1. A partir da eq. de HJ indep. do tempo, obter (por sep. de variáveis) as eqs. ligando cada par (q_i, p_i)
2. Obter as expressões para as curvas $p_i(q_i)$, e calcular $J_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i dq_i$
   O resultado dependerá de constantes $\alpha_1 = K, \alpha_2, \ldots \alpha_n$
3. Inverter essas eqs., escrevendo $K(J_1 \ldots J_n)$
4. Calcular $\omega_i = \frac{\partial K}{\partial J_i}$

ex: oscilador harmônico bidimensional [nesse caso já conhecemos a solução]

Das eqs anteriores: $\begin{cases} p_x = \pm\sqrt{2m\alpha_x - mk_x x^2}, \\ p_y = \text{análogo} \end{cases}$

resolve subst. $x = \sqrt{\frac{2\alpha_x}{K_x}} \operatorname{sen}\theta$

$$\therefore \; J_x = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-x_M}^{x_M = \sqrt{\frac{2\alpha_x}{K_x}}} + p_x \, dx + \int_{x_M}^{-x_M} - p_x \, dx\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{x_M}\sqrt{2m\alpha_x - mk_x x^2} = \sqrt{\frac{m}{K_x}}\,\alpha_x$$

$$\therefore \boxed{K = \alpha_x + \alpha_y = \sqrt{\frac{K_x}{m}}\,J_x + \sqrt{\frac{K_y}{m}}\,J_y} \longrightarrow \boxed{\omega_{x,y} = \frac{\partial K}{\partial J_{x,y}} = \sqrt{\frac{K_{x(y)}}{m}}}$$

$$\rightarrow J_{x,y} = \frac{\alpha}{\omega_{x,y}}$$

Também podemos nesse caso escrever explicitamente a transf. canônica $(x, p) \leftrightarrow (\varphi_x, J_x)$

Para um OHS 1D: $W(x,\alpha) = \int \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 x^2}\, dx$. Como $J = \frac{\alpha}{\omega}$

$$W(x,J) = \int \sqrt{2m\omega J - m^2\omega^2 x^2}\, dx$$

$$\rightarrow \varphi = \frac{\partial W}{\partial J} = m\omega \int \frac{dx}{\sqrt{2m\omega J - m^2\omega^2 x^2}} = \text{asen}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}\, x\right] \rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\, \text{sen}\, \varphi}$$

Ainda: $p = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m\omega J - m^2\omega^2 x^2} = \boxed{\sqrt{2m\omega J}\, \cos \varphi}$

$$\therefore \boxed{\tan \varphi = m\omega\left(\frac{x}{p}\right) \quad ; \quad J = \frac{1}{2}\left[\frac{p^2}{m\omega} + m\omega x^2\right]}$$

· No caso 2D, claramente essas relações valem separadamente em cada direção.